Четвертый класс

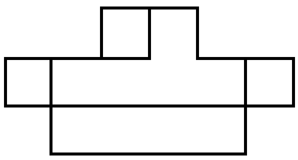
4.1. На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 $см^2$. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

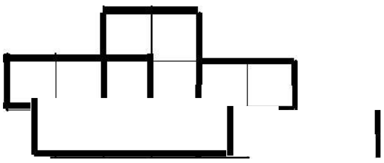
Ответ. Не может.

Решение. Сторона квадрата равна 5 см. Поэтому стороны прямоугольника равны 6 см и 3 см, а его площадь равна 18 $см^2$.

4.2. Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: ** + ** = 197.

Ответ. 99+98=197.

4.3. Разрежьте фигурку  на четыре равных клетчатых фигурки.

Ответ.  .

4.4. Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

Ответ. 5 детей – 3 мальчика и 2 девочки.

Пятый класс

5.1. Поставьте вместо звездочек знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство: $1*2*3*4*5 = 6$.

Ответ. $1+ 2\cdot 3 + 4 - 5 = 6$.

5.2. Поросята Ниф-Ниф и Нуф-Нуф бежали от Волка к домику Наф-Нафа. Если бы поросята не убегали, а стояли на месте, Волк добежал бы до них за 4 минуты. Поросятам бежать до домика Наф-Нафа 6 минут. Волк бежит в 2 раза быстрее поросят. Успеют ли поросята добежать до домика Наф-Нафа?

Ответ. Успеют.

Решение. От места расположения поросят до их дома волку бежать 6:2=3 минуты, т.е. всего ему бежать 4+3=7 минут.

5.3. Разрежьте квадрат на семь треугольников, среди которых есть шесть одинаковых.

Решение. Один из возможных способов разрезания приведен на рисунке.

5.4. Джузеппе делает одного Буратино за 1 час 45 минут. После каждых трех сделанных Буратино Джузеппе вынужден отдыхать полчаса. Папа Карло принес Джузеппе заказ на 10 Буратино. Во сколько Карло может прийти за выполненным заказом, если сам заказ он принес в 18 часов 30 минут?

Ответ. 13:30 следующего дня.

Решение. Один Буратино делается за 1 час 45 минут, то есть за 105 минут. Тогда 10 Буратино делаются за 1050 минут. При этом Джузеппе вынужден будет отдохнуть 3 раза по 30 минут, то есть 90 минут. Итого на весь заказ уйдет 1140 минут. Это составляет ровно 19 часов. Если он начинает в 18:30, то заканчивает в 13:30.

Шестой класс

6.1. Петя, Вася и Толя – три брата. Известно, что Вася в 2 раза старше Пети, Толя в 5 раз старше Пети, и Вася на 6 лет младше Толи. Сколько лет каждому из братьев?

Ответ. Пете 2 года, Васе 4 года, Толе 10 лет.

Решение. Разница в возрасте Толи и Васи составляет 3 возраста Пети. Значит, Пете 2 года. Тогда Васе 4 года, а Толе – 10 лет.

6.2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

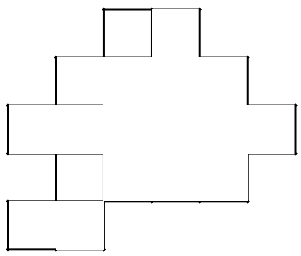
Ответ. Например: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

6.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: "Мы все лжецы". Вася на это ему ответил: "Нет, только ты". Может ли Толя быть лжецом?

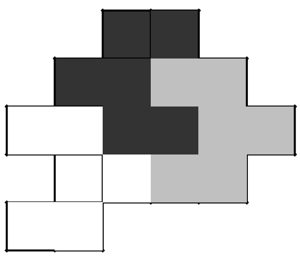
Ответ. Не может.

Решение. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

6.4. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на три равные части (разрезать можно только по границам клеток).



Решение. Один из возможных способов разрезания приведен на рисунке.



6.5. Перед распродажей ложка и вилка стоили одинаково. На распродаже цену ложки уменьшили на 1 рубль, а цену вилки – в 10 раз. Могло ли случиться, что ложка на распродаже продавалась дешевле вилки?

Ответ. Могло.

Решение. Пусть перед распродажей ложка и вилка стоили по 1 рублю 10 копеек. Тогда на распродаже цена ложки была 10 копеек, а вилки – 11 копеек..

Седьмой класс

7.1. Гвоздь, три винта и два шурупа вместе весят 24 грамма; два гвоздя, четыре шурупа и пять винтов вместе весят 44 грамма. Сколько весит винт?

Ответ. 4 грамма.

Решение. Из первого условия следует, что два гвоздя, четыре шурупа и шесть винтов вместе весят 48 граммов. Значит, винт весит винт 48 – 44 = 4 грамма.

7.2. Вставьте в окошки цифры 1, 2, 3,…, 9, используя каждую ровно один раз, чтобы получились верные неравенства: $\square < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square}$.

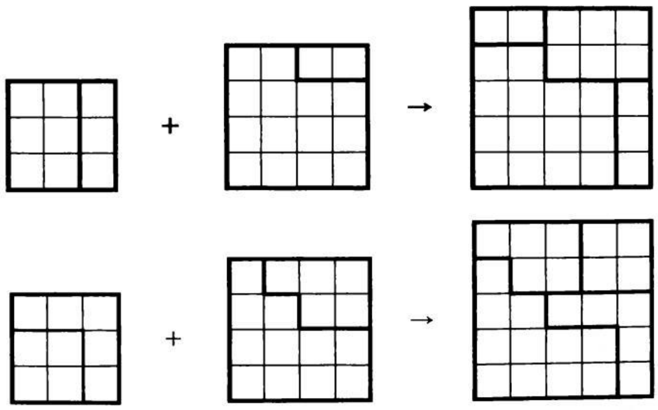
6 7 8 9

Решение. Например, 1 < < < < . ~~5~~ 4

3 2

7.3. Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырех кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рисунке.



7.4. В новогоднюю ночь на подоконнике стояли в ряд (слева направо) фикус, ирис и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре.

Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

Ответ. Ирис-кактус-фикус.

Решение. Проследим закономерности, по которым меняется набор цветов на балконе:

ФИК→ФКИ→КФИ→КИФ→ИКФ→ИФК→КИФ. Далее всё будет повторяться и цветы будут возвращаться на исходные места каждые трое суток. Это значит, что через 363 дня порядок будет тот же, а ещё через двое суток (через четыре перестановки) порядок будет таким: ирис-кактус-фикус.

7.5. У Пети в 4 карманах лежит несколько монет достоинствами в 2, 5 и 10 рублей. В трёх карманах денег поровну, а в четвёртом – вдвое больше, чем в третьем. Могут ли ровно 7 из Петиных монет быть двухрублёвыми?

Ответ. Не могут.

Решение. Общая сумма денег у Пети впятеро больше, чем сумма, лежащая в первом кармане, то есть кратна 5. Если бы у него было ровно 7 двухрублёвых монет, общая сумма денег не делилась бы на 5, так как достоинства остальных его монет делятся на 5.

Восьмой класс

8.1. Петя считает пальцы на левой руке от большого пальца до мизинца и обратно от мизинца до большого. Каждый следующий счет приходится на другой палец. На какой палец придется число 2016? (Счет: 1 – большой, 2 – указательный, 3 – средний, 4 – безымянный, 5 – мизинец, 6 – безымянный, 7 – средний и т. д.)?

Ответ. Указательный.

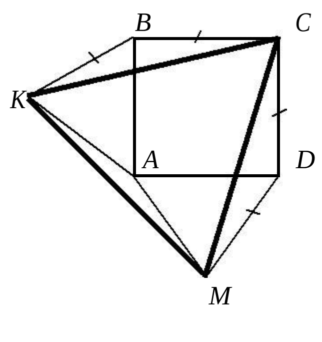
Решение. На большой палец приходится счет 1, 9, 17, 25, …, 2009 так как 2009 = $8 \cdot 251 + 1$.

8.2. Докажите, что если $a + 2b = 3c$ и $b + 2c = 3a$, то $c + 2a = 3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a + 3b + 2c = 3c + 3a$, откуда $c + 2a = 3b$.

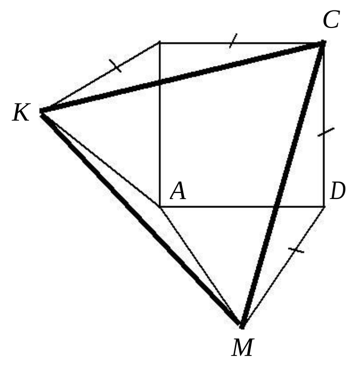
Замечание. Решая систему методом подстановки, получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

8.3. На сторонах *AB* и *AD* квадрата *ABCD* вне него построены равносторонние треугольники *ABK* и *ADM*. Докажите, что треугольник *KCM* также равносторонний.



Решение. Заметим, что $\angle KBC = \angle CDM = 90° + 60° = 150°$. Равнобедренные треугольники *KBC* и *CDM* равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, *CK=CM*. $\angle BCK = \angle DCM = (180° - 150°) : 2 = 15°$, тогда $\angle KCM = 90° - 15° - 15° = 60°$. Треугольник *KCM* является равнобедренным с углом 60°, т.е. равносторонни

B



8.4. В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 10 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось пять функций, графики которых проходят через одну точку.

Решение. Например, графики функций $y=x+10$, $y=2x+9$, $y=3x+8$, $y=4x+7$, $y=5x+6$, проходят через точку (1,11).

8.5. Грани игрального кубика занумерованы числами от 1 до 6. Петя сложил из восьми игральных кубиков куб вдвое большего размера так, что числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы. Может ли сумма всех 24 чисел, написанных на поверхности сложенного Петей куба, равняться 99?

Ответ. Не может.

Решение. Сумма чисел, записанных на гранях всех игральных кубиков равна $(1+2+3+4+5+6)\cdot 8$, то есть четному числу. Так как числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы, то они все числа внутри большого куба разбиваются на пары одинаковых. То есть сумма всех чисел внутри большого куба четна. Значит, и сумма всех чисел на поверхности большого куба также должна быть четной (как разность четных чисел) и не может равняться 99.

Девятый класс

9.1. На прямой через равные промежутки поставили сто точек, и они заняли отрезок длины a. Затем на прямой через такие же промежутки поставили десять тысяч точек, и они заняли отрезок длины b. Во сколько раз b больше a?

Ответ. В 101 раз.

Решение. Обозначим длину промежутка за x. Сто тогда делят отрезок длины a на 99 промежутков, а 10000 точек делят отрезок длины b на 9999 промежутков. Поэтому a=99x, b=9999x и b=101a.

9.2. Среднее арифметическое двух чисел составляет 60% от большего из них. Во сколько раз среднее арифметическое этих чисел больше меньшего числа?

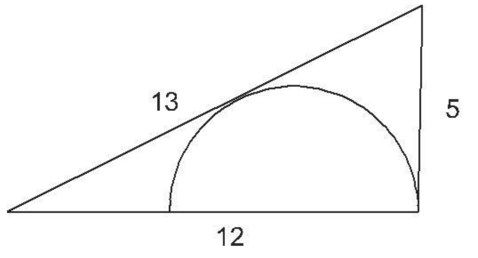
Ответ. В 3 раза.

Решение. Обозначим наши числа через a (меньшее число) и (большее число) b. Тогда по условию $\frac{a+b}{2} = 0{,}6b \Leftrightarrow b = 5a$. Тогда $\frac{a+b}{2} = 3a$.

9.3. Продавец на рынке хочет разложить кучку из 41 ореха на 41 кучки по одному ореху. Ему разрешается разделить любую кучку на две, но, если при этом получились две неодинаковые кучки, он должен заплатить хозяину рынка 1 рубль. Как ему выполнить свою задачу, заплатив всего 2 рубля?

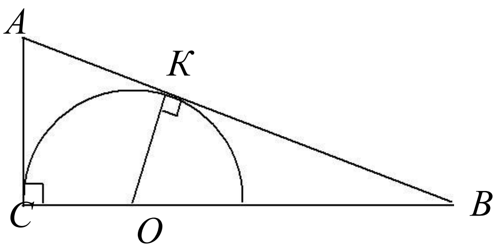
Решение. Например, продавец может сделать так. Сначала он разделит кучку из 41 ореха на две кучки: из 1 ореха и из 40 орехов. Затем кучку из 40 орехов он разделит на две кучки: из 32 орехов и из 8 орехов. За эти операции продавец заплатит 2 рубля. Дальше он бесплатно может делить оставшиеся кучки пополам, пока не получатся кучки из 1 ореха.

9.4. В прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вписана полуокружность, как показано на рисунке. Найдите радиус полуокружности.



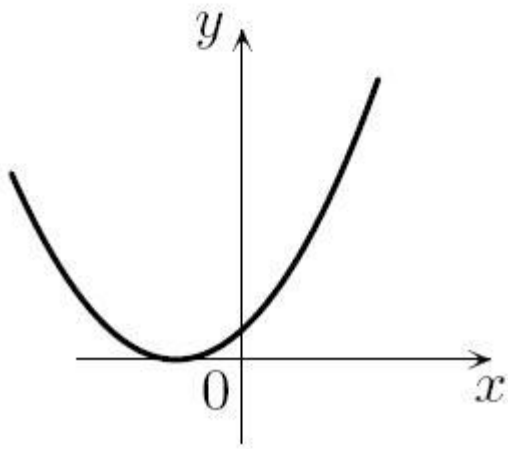
Ответ. $3\frac{1}{3}$.

Решение. Обозначим вершины треугольника и проведем радиус в точку касания полуокружности со стороной *AB*. *AC*=*AK*=5 как касательные, проведенные из одной точки, тогда *KB*=13–5=8. Угол *OKB* равен 90°, тогда треугольники *ACB* и *OKB* подобны по двум углам. Пусть $CO=OK=x$. Из подобия треугольников следует, что $\frac{OB}{AB}=\frac{KB}{CB}\Rightarrow\frac{12-x}{13}=\frac{8}{12}\Rightarrow 3x=10\Rightarrow x=3\frac{1}{3}$.



Замечание. Другое решение можно получить, отразив картинку симметрично относительно катета BC и посчитав площадь двумя способами: $S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12=\frac{1}{2}\cdot(10+13+13)\cdot r$.

9.5. Дан график функции $y=x^2+ax+a$ (см. рис.). Найдите *a*.



Ответ. 4.

Решение. График касается оси *Ox,* поэтому дискриминант трехчлена равен нулю: $D=a^2-4a=0$. Отсюда $a=0$ или $a=4$. Но из графика следует, что $a\neq 0$. (Нарисован график трехчлена $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$).

Десятый класс

10.1. На доске написано число 543254325432.Некоторые цифры стерли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

Ответ. 5435432532.

Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четверку.

10.2. Найдите все пары чисел *x*, *y*, для которых выполнено равенство $\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}=x+y+1.$

Ответ. $x = y = -0{,}5$.

Решение. В силу неотрицательности подкоренных выражений должны одновременно выполняться неравенства $x \ge y$, $x \le y$, откуда и следует $x = y = -0{,}5$.

10.3. Существует ли треугольник, у которого длины всех сторон и всех высот являются целыми числами?

Ответ. Существует.

Решение. Годится, например, прямоугольный треугольник со сторонами 15, 20 и 25. Две его стороны одновременно являются высотами, а высота, проведенная к гипотенузе, равна $h = \frac{ab}{c} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

10.4. Петя составляет «таблицу умножения». Слева от таблицы он написал натуральные числа от 10 до 75 включительно, сверху – от 11 до 48 включительно. После чего записал в таблицу соответствующие произведения пар чисел. Сколько из выписанных произведений являются четными числами?

Ответ. 1881.

Решение. Заметим, что произведение двух чисел будет нечетным, если оба сомножителя нечетны, и четным в остальных случаях. Всего в таблице записано $(75-10+1)\cdot(48-11+1) = 2508$ произведений. Заметим, что среди чисел от 10 до 75 будет 33 нечетных числа, а среди чисел от 11 до 48 – 19 нечетных чисел. Поэтому в таблице будет $33 \cdot 19 = 627$ нечетных произведений. Остальные $2508 - 627 = 1881$ будут четными.

10.5. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF – биссектрисы треугольников ADB и CDB. Докажите, что $EF \perp AC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Отсюда следует, что $EF \perp AC$.

Одиннадцатый класс

11.1. По дороге едут велосипедисты: на запад – Вася и Петя с равными между собой скоростями, а на восток – Коля и Миша с равными между собой скоростями. Вася встретился с Мишей в 12.00, Петя с Мишей – в 15.00, Вася с Колей – в 14.00. Когда встретились Петя с Колей?

Ответ. в 17.00.

Решение. Расстояние между Мишей и Колей и их скорости не меняются, а скорости Васи и Пети равны. Вася встретил Колю через 2 часа после Миши, значит, Петя встретят Колю тоже через 2 часа после Миши, т. е. в 17.00.

11.2. В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке?

Ответ. 17.

Решение. Так как из 18 шаров найдется хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдется хотя бы один красный, то есть синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих – 9, а красных – 17.

11.3. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |x-a|=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{a}=1 \end{cases}$ имеет решения?

Ответ. При $a=0$.

Решение. Из условия следует, что x и a – неотрицательные числа. Тогда из равенства $x-a=(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ следует, что $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=1$. Но $\sqrt{x}+\sqrt{a}=1$. Поэтому $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{x}-\sqrt{a}$ и $2\sqrt{a}=0$. То есть a=0. Осталось заметить, что при a=0 система имеет решение x=1.

11.4. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

Ответ. 105.

Решение.

Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем 1 + 2 + ... + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105.

Это возможно: (1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15.

11.5. В правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S SA/AB=2. Проведены высота AD треугольника SAB и медиана BM треугольника ABC. Найдите отношение MD/BD.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Решение. Обозначим длину отрезка AB за 1, тогда SA=2. Найдём прежде всего длины отрезков BD и SD. Пусть BD=*x*. Тогда, применяя теорему Пифагора к треугольникам ABD и ASD, получаем $AD^2=1-x^2 = 4-(2-x)^2 \Rightarrow BD=x=1/2$. Далее в треугольнике BMD $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, для того чтобы воспользоваться теоремой косинусов, достаточно найти косинус угла MBD. Но из прямоугольного треугольника SBM получаем:

$$\cos\angle SBM=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow DM^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{5}{8}\Rightarrow DM=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$